Kyvadlo

Zadání:

a) Určete délku l tenké tyče kývající okolo osy umístěné na jejím konci, aby doba kmitu byla přesně T_1 =1 s.

b) Stejnou tyč uprostřed ostře ohneme a v místě ohybu položíme na tenký břit (obr. 4b). Určete úhel ohybu 2φ, aby doba kmitu byla opět přesně T_2= 1 s.

c) Ohnutou tyč z úlohy b) upevníme otáčivě na konci. Určete dobu kmitu tohoto kyvadla T_3.

Pomůcky:

Drát o průměru 2 mm z mědi, svářečku, tyč, pilník, metr, vrták, háček

Měření času dnes

Elektronické přístroje k přesnému měření času jsou v dnešní době tak rozšířené, že si jejich přítomnost často téměř neuvědomujeme (hodinky, mobilní telefony, GPS navigace,…). Tento luxus nám však přineslo až použití piezoelektrických krystalů, jež bylo poprvé provedeno pro účely měření času až roku 1928. Do té doby byla právě kyvadla zařízeními, která dokázala určovat čas s nejvyšší přesností.

Galileo Galilei

Základ měření času pomocí kyvadel dal roku 1602 italský vědec Galileo Galilei. Zjistil totiž, že perioda kyvadla vůbec nezávisí na výchylce (alespoň v přiblížení malých kmitů). Na rozdíl od matematického kyvadla dochází u reálného kyvadla k útlumu vlivem tření a výchylka kyvadla v krajních bodech se tedy zmenšuje. Galileův závěr však říká, že změna maximální výchylky nemá žádný vliv na periodu. Tato vlastnost, která předurčila kyvadla k měření času, se nazývá izochronie.

Výpočet periody

Konkrétní vyjádření periody T matematického kyvadla pro malé kmity je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

kde l je délka kyvadla a g tíhové zrychlení.

Moment setrvačností tělesa vzhledem k ose rovnoběžné s osou jdoucí těžištěm vypočítáme podle Steinerovy věty: $J = J_T + mr^2$, kde J_T je moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm, m je hmotnost tělesa a r je vzdálenost rovnoběžných os.

a) U rovné tyče je $d = \frac{l}{2},\ J = \frac{ml^2}{3}.$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3}}{\frac{mgl}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}, \quad l = \frac{3gT_1^2}{8\pi^2} = 0{,}372\ m$$

b) U ohnuté tyče je $d = \frac{l\cos\boldsymbol{\varphi}}{4},\ J = \frac{ml^2}{12}.$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{12}}{\frac{mgl\cos\boldsymbol{\varphi}}{4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g\cos\boldsymbol{\varphi}}} = T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

Z toho $\cos\varphi = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \varphi = 60°$**.** Obě poloviny svírají úhel $2\varphi = 120°$**.**

c) Ohnutá tyč upevněná na konci je $d^2 = \left(\frac{1}{2}\sin\varphi\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\cos\varphi\right)^2 = \frac{13l^2}{64}, d = \frac{l}{8}\sqrt{13}$

Podle kosinové věty

$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{4}\right)^2 - 2\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}\cos2\varphi = \frac{7}{16}l^2.$$

$$J = \frac{1}{3}\cdot\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\cdot\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}\cdot\frac{7}{16}l^2 = \frac{13}{48}ml^2.$$

$$T^3 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{13ml^2}{48}}{mgl\frac{\sqrt{13}}{8}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\sqrt{13}}{6g}}.$$

Po dosazení $l = \frac{3gT_1^2}{8\pi^2}$ dostaneme

$$T_3 = \frac{T_1}{2}\sqrt[4]{13} = 0{,}95\ T_1$$

Porovnáním jsme došli k závěru, že naše měření pravděpodobně dává správné hodnoty.