Digitální učební materiál

Číslo projektu:	**CZ.1.07/1.5.00/34.0548**
Název školy:	**Gymnázium, Trutnov, Jiráskovo náměstí 325**
Název materiálu:	**VY_32_INOVACE_143_IVT**
Autor:	**Ing. Pavel Bezděk**
Tematický okruh:	**Algoritmy**
Datum tvorby:	**červenec 2013**
Ročník:	**4. ročník a oktáva**
Anotace:	**Algoritmus III. – Numerický algoritmus a jeho stabilita**
Metodický pokyn:	**Při výuce nutno postupovat individuálně. Části DUM – „ Pro hloubavé“ jsou určeny pro zájemce o studium na technických a matematicko-fyzikálních oborech vysokých škol.**
Pokud není uvedeno jinak, je použitý materiál z vlastních zdrojů autora DUM.	

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Autor	Ing. Pavel Bezděk		
Vytvořeno dne	9. 7. 2013		
Odpilotováno dne	25. 11. 2013	ve třídě	8. Y
Vzdělávací oblast	Informatika a informační a komunikační technologie		
Vzdělávací obor	Informatika a výpočetní technika		
Tematický okruh	Algoritmus		
Téma	Algoritmus III. - Numerický algoritmus		
Klíčová slova	Numerická matematika, algoritmus, chyby		

Numerické úlohy

a numerický algoritmus

Metody převádějící úlohu na úlohu jednodušší

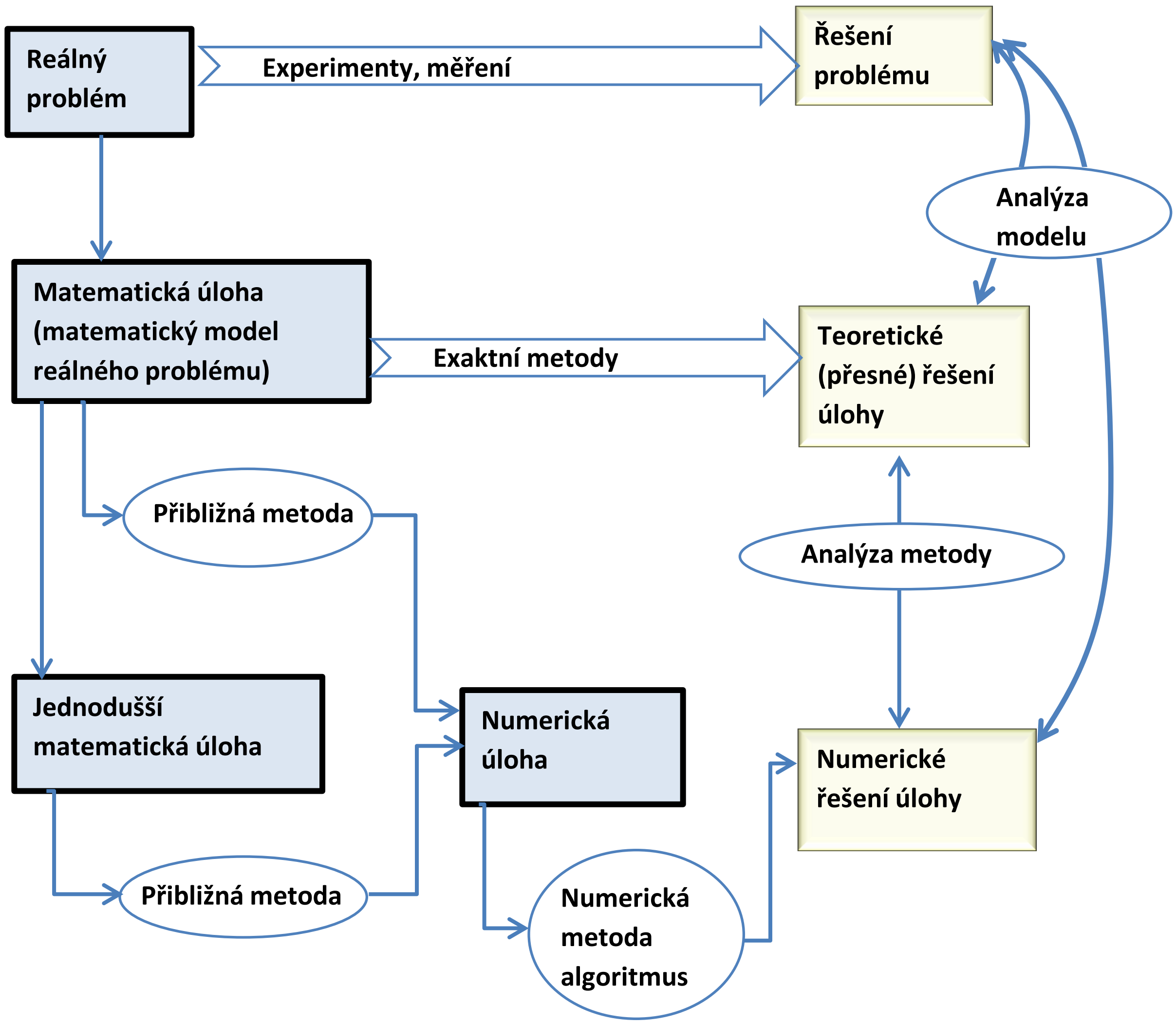
(nebo systém úloh)

1. **Exaktní** (teoretické) - přesné metody, matematické modely

2. **Přibližné** - aproximace (přibližné vyjádření),
   - iterace (krok přiblížení se k výsledku)

3. **Numerické**

Schéma převodu reálného problému na numerickou úlohu



Numerická úloha

- ***Numerickou úlohou* rozumíme jasný a jednoznačný popis funkčního vztahu mezi konečným počtem vstupních a výstupních dat**, tj. mezi danými a hledanými objekty numerické úlohy. Pro numerické úlohy je požadavek konečnosti souborů vstupních a výstupních dat podstatný. Data numerické úlohy musí být vyjádřena konečným počtem (reálných) čísel. Numerická úloha je tedy takovým matematickým modelem reálného problému, který může být realizován na počítači v konečném čase. ***Základní matematickou disciplínou, která konstruuje a analyzuje metody a postupy pro realizaci numerických úloh na počítačích je numerická matematika.***

- ***Algoritmem numerické metody*** rozumíme jasný a ***jednoznačný popis*** (specifikaci) ***konečné posloupnosti operací***, jejichž prostřednictvím je ***m-tici čísel z určité množiny vstupních dat jednoznačně přiřazena n-tice výsledků***. **Operacemi rozumíme aritmetické a logické operace, které může provádět počítač.**

Numerická matematika

1) Převádí matematické úlohy na numerické, případně převádí numerické úlohy na jednodušší numerickou úlohu.

2) Udává algoritmy pro řešení numerických úloh a vyšetřování vlastností těchto algoritmů

Termín numerický algoritmus zdůrazňuje, že nás zajímají pouze aritmetické operace s čísly (nikoliv logické operace).

V počítači se však aritmetické operace nerealizují přesně. Při zavádění vstupních dat do počítače se dopouštíme jistých vstupních chyb. Takže **algoritmus realizovaný počítačem je tzv. strojový algoritmus. Mezivýsledky a pak konečný výsledek se proto může lišit od teoretického výsledku.**

Reálné číslo je možné zapsat jen na určitý počet platných míst, proto zapisujeme čísla do PC dvěma způsoby

- 1. **Řezáním** všechny číslice za poslední platnou číslicí se smažou.
- 2. **Zaokrouhlováním** předposlední platná číslice se zaokrouhlí podle poslední platné číslice.

Z toho plyne, že existuje maximální a minimální číslo, se kterým mohu v počítači počítat. Pokud se dostaneme při výpočtu mimo interval <min. číslo; max.číslo> dojde k **podtečení** nebo **přetečení**.

Další **zdroje chyb**:

Chyba matematického modelu - rozdíl řešení idealizovaného problému a řešení reálného problému.
Je-li chyba moc velká, je matematický model nevhodný.

Chyba metody - metoda použitá k řešení nám neposkytne přesné (teoretické) řešení, tato odchylka od přesného řešení je chybou metody.

Chyba aproximace – řešíme matematickou úlohu tím, že ji nahradíme (aproximujeme) úlohou jednodušší (obvykle úlohou numerickou). Rozdíl v řešení matematické a aproximované úlohy je chyba aproximace. Je to druh chyby metody.

Chyba ve vstupních datech - dané chybami měření a chybou zobrazení vstupních dat do počítače.

Chyby zaokrouhlování - všechny nepřesnosti způsobené realizací algoritmu, včetně nepřesného provádění aritmetických operací.

Absolutní a relativní chyba

Ve výpočtech jsme často nuceni přibližně nahradit číslo x číslem $\tilde{x}$.
Číslo $\tilde{x}$ se nazývá aproximací čísla x.

Absolutní chyba aproximace $\tilde{x}$: Δx $\qquad$ $x - \tilde{x} = \Delta x$

Odhad absolutní chyby: $\varepsilon(\tilde{x}) \geq 0$ $\qquad$ $|x - \tilde{x}| \leq \varepsilon(\tilde{x})$

Relativní chyba aproximace $\tilde{x}$: $\Delta x / x$ $\qquad$ $(\Delta x / x) = (x - \tilde{x})/x$ $\qquad$ $x \neq 0$
uvádí se často v procentech

Odhad relativní chyby $\delta(\tilde{x})$ $\qquad$ $|(x - \tilde{x})/x| \leq \varepsilon(\tilde{x})/|x| = \delta(\tilde{x})$

Př. Pro $x = \pi = 3{,}14159\ldots$, $\quad \tilde{x} = 3{,}14 \quad \Delta x = +0{,}00159 \quad \varepsilon(\tilde{x}) = 2.10^{-3}$
$\Delta x / x \approx \Delta x / \tilde{x} \approx +0{,}00159/3{,}14 = +0{,}000506 = 0{,}0506\%$

Ve výpočtech se vyhýbáme rozdílům blízkých čísel, zvětšují relativní chybu, která se projeví ztrátou platných číslic. Malá relativní chyba nám udrží vyšší počet platných číslic.

Podmíněnost úloh a algoritmů

- Mezi matematickými úlohami, včetně úloh numerických, se setkáváme s úlohami, jejichž ***řešení jsou velmi citlivá na změny ve vstupních datech***. ***Malé změny vstupních dat se projeví velkým „rozptylem" řešení.***

- Musíme proto podrobit hlubší analýze závislost vstupních a výstupních dat. **Algoritmy mohou být velmi citlivé na změny ve vstupních datech** a ***musíme proto tomu věnovat velkou pozornost při volbě algoritmu pro řešení numerické úlohy***.

Podmíněnost úloh

Úloha je dobře podmíněná,* jestli *malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu řešení

Číslo podmíněnosti úlohy C_p **$C_p \approx \delta(y)/\delta(x)$**

$C_p \approx 1$ (velmi) dobře podmíněná

C_p blížící se 100 a větší - špatně podmíněná

Příklad: Polynom **$p(x) = x^2 + x - 1150$**

$p(100/3) = 10000/9+300/9-10350/9= -50/9 \approx -5{,}56$

změna na vstupu --> **$\Delta x=1/3$**, $p(33) = 1089+33-1150= -28$,

$|\Delta y|= |-5{,}56 -(-28)|=22{,}44 \quad \delta(x) \geq |\Delta x|/|x|, \ \delta(y) \geq |\Delta y|/|y|$

Změně na vstupu **$\Delta x=1/3$** odpovídá změna na výstupu **$\Delta y= 22{,}4$ $C_p \approx 400$**

$(|\Delta y|/|y|)/|(\Delta x|/|x|)= (22{,}4/5{,}56)/((1/3)/(100/3))=403{,}6 \quad |\Delta y| <66|\Delta x|$

Úloha je špatně podmíněná.

(Asi proto, že se pohybujeme v okolí kořene polynomu: 33,41533576)

Často se pro špatně podmíněné úlohy používají speciální metody, které omezují růst zaokrouhlovacích chyb.

Příklad: Polynom $\mathbf{p(x) = x^2 + x - 1150}$

$p(299/3) = 89401/9+897/9-10350/9= 79948/9 \approx 8883$

$\mathbf{x- \tilde{x}=\Delta x}$

$\mathbf{x=299/3}$ $\mathbf{\tilde{x}=300/3}$

změna na vstupu --> $\mathbf{\Delta x= -1/3}$,

$300/3=100$ $p(100) = 10000+100-1150= 8950$

$|\Delta y|= |8883 - 8950|=67$ $\delta(x)\geq|\Delta x|/|x|$, $\delta(y)\geq|\Delta y|/|y|$

Změně na vstupu $\mathbf{\Delta x= -1/3}$ odpovídá změna na výstupu $\mathbf{\Delta y= 67}$ $\mathbf{C_p \approx 2}$

$(|\Delta y|/|y|)/|(\Delta x|/|x|)= (67/8883)/((1/3)/(299/3))=2,25$ $|\Delta y| <202|\Delta x|$

Úloha je velmi dobře podmíněná,

protože nejsme blízko kořene polynomu 33,41533576.

Test

Zjistěte podmíněnost úlohy:

Řešení polynomu

$$p(x)=x^3+x^2-100$$

Řešení

Zjistěte podmíněnost úlohy:

Polynom $p(x)=x^3+x^2-100$

$p(13/3)= (13/3)^3+(13/3)^2-100= 0{,}148148148148$ $130/30 - 1/30 = 129/3 = 4{,}3$

$p(4{,}3)= (4{,}3)^3+(4{,}3)^2-100= -2{,}003$ změna na vstupu: **$\Delta x=1/30$**

$|\Delta y|= |\ 0{,}148148- (-2{,}003)|=2{,}151148148$

$\delta(x)\geq|\Delta x|/|x|$ $\delta(x)\geq|1/30|/|13/3|=0{,}0076923$

$\delta(y)\geq|\Delta y|/|y|$ $\delta(y)\geq|2{,}151148148|/|0{,}148148|=14{,}520250$

$Cp \approx \delta(y)/\delta(x)$ $Cp= 14{,}520250/0{,}0076923=1887{,}63 \approx$ **1888**

Úloha je špatně podmíněna

(Pohybujeme se v okolí kořene polynomu 4,331053011264824)

$p(121/3)= (121/3)^3+(121/3)^2-100=67140{,}1481481$ $1210/30 - 1/30 = 1209/30 = 40{,}3$

$p(40{,}3)= (40{,}3)^3+(40{,}3)^2-100=66974{,}917$ **$\Delta x=1/30$**

$|\Delta y|= |67140{,}148148 - 66974{,}917|= 165{,}231148148$

$\delta(x)\geq|\Delta x|/|x|$ $\delta(x)\geq|1/30|/|121/3|=0{,}00086446$

$\delta(y)\geq|\Delta y|/|y|$ $\delta(y)\geq|165{,}231148|/|67140{,}148148|= 0{,}0024609887$

$Cp \approx \delta(y)/\delta(x)$ $Cp= 0{,}0024609887/0{,}00086446= 2{,}84685 \approx$ **3**

Úloha je velmi dobře podmíněna. Jen v okolí kořene polynomu je špatně podmíněna.

Stabilita algoritmu

Při realizaci konkrétního numerického algoritmu na počítači se dopouštíme chyb v aritmetických operacích, neboť počítač pracuje s čísly v intervalu <min. číslo; max. číslo>. Musíme také posoudit citlivost algoritmu na zaokrouhlovací chyby, včetně citlivosti na změny ve vstupních datech.

Chceme-li se vyvarovat nesmyslných výsledků, musíme hledat algoritmy málo citlivé k těmto vlivům.

Jsou to algoritmy stabilní.

Stabilní algoritmus

- **Dobře podmíněný** - ***málo citlivý na poruchy v datech***
- **Numericky stabilní** - ***málo citlivý na vliv zaokrouhlovacích chyb během výpočtu*** na počítači

(přesněji, numerická realizace algoritmu na počítači, musí být numericky stabilní)

Pro hloubavé:

Metody vyhodnocující stabilitu algoritmu

- **Metoda počítačových experimentů:** Řešíme několik stejných úloh s poněkud pozměněnými daty a sledujeme, jak se poruchy ve vstupních datech projeví ve výsledku (na výstupu) - **metoda experimentálních pertubací**

- **Automatická kontrola přesnosti** - ***intervalová analýza***: Ztrátu přesnosti vlivem šíření chyby může registrovat samotný počítač, je to však za cenu zpomalení výpočtu a dostáváme maximální odhady chyb. **Každé číslo**, které **vstupuje** v libovolné fázi **do algoritmu, nahradíme intervalem, který s jistotou obsahuje toto číslo**. Celý algoritmus se provádí s těmito intervaly a **výsledek celého výpočtu dostaneme opět jako interval**. **Algoritmus, který poskytne nejužší výsledný interval, je lepší.**

Použité zdroje

MÍKA, Stanislav. *Numerické metody algebry*. Vyd. 2. Praha: SNTL, 1985, 169 s. Matematika pro vysoké školy technické, sešit IV.