Digitální učební materiál

Číslo projektu:	**CZ.1.07/1.5.00/34.0548**
Název školy:	**Gymnázium, Trutnov, Jiráskovo náměstí 325**
Název materiálu:	**VY_32_INOVACE_160_IVT**
Autor:	**Ing. Pavel Bezděk**
Tematický okruh:	**Algoritmy**
Datum tvorby:	**září 2013**
Ročník:	**4. ročník a oktáva**
Anotace:	**Algoritmus XX. – Algoritmus aproximace funkce Taylorův polynom**
Metodický pokyn:	**Při výuce nutno postupovat individuálně. Části DUM – „ Pro hloubavé“, jsou určeny pro zájemce o studium na technických a matematicko-fyzikálních oborech vysokých škol.**

Pokud není uvedeno jinak, je použitý materiál z vlastních zdrojů autora DUM.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Autor	Ing. Pavel Bezděk		
Vytvořeno dne	28. 9. 2013		
Odpilotováno dne	28. 4. 2014	ve třídě	8.Y
Vzdělávací oblast	Informatika a informační a komunikační technologie		
Vzdělávací obor	Informatika a výpočetní technika		
Tematický okruh	Algoritmus		
Téma	Algoritmus XX. – Algoritmus aproximace funkce – Taylorův polynom		
Klíčová slova	Algoritmus, aproximace, Taylorův polynom		

Taylorův polynom

φ - aproximace funkce *f*

Jedním ze základních úkolů numerických metod matematické analýzy je studium aproximací funkcí.

Při numerickém řešení úloh matematické analýzy totiž často nahrazujeme danou funkci *f* (spojitou funkci jedné proměnné na intervalu <a,b>), vystupující v řešené matematické úloze, jinou funkcí *φ*, která v nějakém vhodném smyslu napodobuje funkci *f* a snadno se přitom matematicky zpracovává či modeluje na počítači.

Tuto funkci *φ* nazýváme aproximací (přiblížením) funkce *f*.

Taylorův polynom

Máme funkci f, která má v daném bodě $x_0 \in \langle a,b \rangle$ alespoň n derivací. Předpokládejme, že známe hodnoty derivací $f^{(j)}(x_0)$, $j=0, 1, 2, \ldots n$, ($f^{(0)} \equiv f$) a že chceme najít aproximaci φ funkce f takovou, která, „co nejlépe“ napodobuje chování funkce f v okolí bodu x_0. Vzhledem ke způsobu zadání funkce f je přirozené tento požadavek matematicky vyjádřit takto: Hledáme aproximaci φ takovou, aby platilo

$$\varphi^{(j)}(x_0)= f^{(j)}(x_0) \qquad j=0, 1, 2, \ldots\ldots\; n$$

Hledáme polynom nejvýše n-tého stupně a zapíšeme φ ve tvaru

$$\varphi(x)= c_0 + c_1(x-x_0)+ c_2(x-x_0)^2- c_3(x-x_0)^3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots c_n(x-x_0)^n$$

Existuje právě jeden takový polynom s koeficienty $c_j=f^{(j)}(x_0)/j!$ $j=0,1,2 ..n$

$$p_n(x) = f(x_o) \;+\; (f'(x_0)/1!)(x-x_0) \;+\; (f''(x_0)/2!)(x-x_0)^2 +$$
$$(f'''(x_0)/3!)(x-x_0)^3 \;+\; \ldots\ldots\ldots\ldots \;+ (f^{(n)}(x_0)/n!)(x-x_0)^n$$

Výpočet hodnoty funkce e^x, v bodě nula.

Funkce y=e^x , $|x|<\infty$, $e^0=1$, $e^x=(e^x)'=(e^x)''=(e^x)'''=(e^x)^{(4)}\ldots\ldots=(e^x)^{(n)}$.
Proto všechny derivace v bodě nula budou rovny 1.

$$p_n(x) = f(x_o) + (f'(x_0)/1!)(x-x_0) + f''(x_0)/2!)(x-x_0)^2 + (f'''(x_0)/3!)(x-x_0)^3 + \ldots + (f^{(n)}(x_0)/n!)(x-x_0)^n$$

$$p(1)= e^0 +((e^0)'/1)*(1-0) + ((e^0)''/2!)*(1-0)^2 + ((e^0)'''/3!)*(1-0)^3 + ((e0)^{(4)}/4!)*(1-0)^4 + \ldots$$

Teď si můžeme spočítat hodnotu čísla e (tj. e^1) libovolně přesně. Je to totiž:

e = 1+1+1/ 2 +1 /6 +1/ 24 +1 /120 + 1/720 +1/5040 + 1/40320 +1/362880 +1/3628800 ...

e = 2,7182818011463844797178130511464

e = **2,7182818**28459045235360287471352662497757247093699959574966967

Když to srovnáme s Eulerovým číslem přesně spočítaným na podstatně více desetinných míst, vidíme, že jsme počítali při tomto jednoduchém výpočtu s přesností na deseti milióntiny, tedy s postačující přesností.

Velmi jednoduchý program pro spočítání Eulerova čísla Pascal

```
Program euler;
uses crt;
var e,faktorial,f, ep: real; i,n:integer;
begin
writeln;
write('vloz  počet aproximaci  (do 50) :');
read(n);
writeln;
  f:=1; ep:=1;
for  i:=1 to n do  begin
                    faktorial:= f*i;
                    f:=faktorial;
                    e:=ep + (1/faktorial);
                    ep:=e
                   end;
write('e=',e:2:30);
writeln;
repeat until keypressed;
end.
```

Velmi jednoduchý program pro spočítání Eulerova čísla C++

```
//Tayloruv polynom - eulerovo cislo
#include <iostream>
#include <iomanip>
using namespace std;
double e,faktorial,f,ep;
int i,n;
int main()
{   cout<<"    Vloz pocet aproximaci (do 50): "; cin>>n; cout<<endl;
   f=1; ep=1;
   for (i=1; i<=n; i++)
       {faktorial=f*i; f=faktorial; e=ep + (1/faktorial);  ep=e;
       }
   cout<<"    Eulerovo cislo:    e= "<<setprecision(51)<<e;
return 0;
}
```

```
    Vloz pocet aproximaci (do 50): 50
    Eulerovo cislo:
 e= 2.718281828459045534884808148490265011787414550781 25
```

Nekonečné řady dalších funkcí pro hloubavé:

$y=a^x$

$a>0$, $|x|<\infty$, $x_0=0$, $a^0=1$, $(a^x)' = a^x \ln a$, $(a^0)' = a^0 \ln a = \ln a$

$$p_n(x) = f(x_o)+(f'(x_0)/1!)(x-x_0)+f''(x_0)/2!)(x-x_0)^2+(f'''(x_0)/3!)(x-x_0)^3+ \dots +(f^{(n)}(x_0)/n!)(x-x_0)^n$$

$$a^x \approx a^0 + (a^0 \ln a)(x-0)/1! + (\ln a)(a^0 \ln a)(x-0)^2/2! + (\ln a)(\ln a)(a^0 \ln a)(x-0)^3/3!$$

$$a^x \approx 1 + (x \ln a)/1! + (x^2 \ln^2 a)/2! + (x^3 \ln^3 a)/3! + (x^4 \ln^4 a)/4! \dots$$

$$2^x \approx 1 + x \ln 2 + (x^2 \ln^2 2)/2 + (x^3 \ln^3 2)/6 + (x^4 \ln^4 2)/24 + (x^5 \ln^5 2)/120 \dots\dots$$

y=sin(x)

$|x|<\infty$, $x_0=0$, $(\sin(x))' = \cos(x)$, $((\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\sin(0))' = \cos(0) = 1$ $((\cos(0))' = -\sin(0) = 0$

$\sin(0))' = \cos(0) = 1$ $\sin(0))'' = -\sin(0) = 0$ $\sin(0))''' = -\cos(0) = -1$ $\sin(0))^{(4)} = \sin(0) = 0$ $\sin(0))^{(5)} = \cos(0) = 1$

$$p_n(x) = f(x_o)+(f'(x_0)/1!)(x-x_0)+f''(x_0)/2!)(x-x_0)^2+(f'''(x_0)/3!)(x-x_0)^3+\ldots+(f(n)(x_0)/n!)(x-x_0)^n$$

$$\sin(x) \approx \sin(0)+(\sin(0))'/1!)(x-0)+(\sin(0))''/2!)(x-0)^2+(\sin(0))^{(3)}/3!)(x-0)^3+(\sin(0))^{(4)}/4!)(x-0)^4..$$

$$\sin(x) \approx \quad 0 + ((1)/1!)(x)+(-(0)/2!)(x)^2+((-1)/3!)(x)^3 + ((0)/4!)(x)^4+((1)/5!)(x)^5\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin(x) \approx \quad 0 + \quad x \quad + \quad 0 \quad - \quad (1/3!)/x^3 \quad + \quad 0 \quad + (1/5!)/x^5\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \ldots\ldots\ldots$$

$y=\cos(x)$

$|x|<\infty$, $x_0=0$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $((\sin(x))' = -\cos(x)$, $(\cos(0))' = -\sin(0) = 0$, $((\sin(0))' = \cos(0) = 1$

$\cos(0))' = -\sin(0) = 0$, $\cos(0))'' = -\cos(0) = -1$, $\cos(0))''' = \sin(0) = 0$, $\cos(0))^{(4)} = \cos(0) = 1$, $\sin(0))^{(5)} = -\sin(0) = 0$

$$p_n(x) = f(x_o)+(f'(x_0)/1!)(x-x_0)+f''(x_0)/2!)(x-x_0)^2+(f'''(x_0)/3!)(x-x_0)^3+\ldots+(f(n)(x_0)/n!)(x-x_0)^n$$

$$\cos(x) \approx \cos(0)+(\cos(0))'/1!)(x-0)+(\cos(0))''/2!)(x-0)^2+(\cos(0))'''/3!)(x-0)^3$$

$$\cos(x) \approx \quad 1 \ + (-(0)/1!)(x)+((-1)/2!)(x)^2+((0)/3!)(x)^3 + ((1)/4!)(x)^4+(-(0)/5!)(x)^5$$

$$\cos(x) \approx \quad 1 + \quad 0 \quad - \quad (x^2)/2! \quad + \quad 0 \quad + \ (x^4/4!) \quad + \quad 0$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} \ldots\ldots$$

Nekonečné řady jiných funkcí

$$\arcsin(x) = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{x^9}{9}$$

|x|<1

$$\arccos(x) = \pi/2 - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{x^9}{9}$$

|x|<1

Použité zdroje

PŘIKRYL, Petr. *Numerické metody analýzy*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1988. MATEMATIKA PRO VYSOKÉ ŠKOLY TECHNICKÉ, sešit XXIV.

HLAVÁČEK, Antonín. *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky pro přípravu pracujících ke studiu na vysokých školách I*. 2. změn. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971