Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0548
Název školy:	Gymnázium, Trutnov, Jiráskovo náměstí 325
Název materiálu:	VY_32_INOVACE_155_IVT
Autor:	Ing. Pavel Bezděk
Tematický okruh:	Algoritmy
Datum tvorby:	září 2013
Ročník:	4. ročník a oktáva
Anotace:	Algoritmus XV. – Algoritmus řešení soustav lineárních rovnic I. Gaussova eliminace 2
Metodický pokyn:	Při výuce nutno postupovat individuálně. Celý tento DUM je rozšířením algoritmu řešení soustav lineárních rovnic - Gaussovy eliminace a je určen pro zájemce o studium na technických a matematicko-fyzikálních oborech vysokých škol.

Pokud není uvedeno jinak, je použitý materiál z vlastních zdrojů autora DUM.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Autor	Ing. Pavel Bezděk		
Vytvořeno dne	4. 9. 2013		
Odpilotováno dne	17. 3. 2014	ve třídě	8.Y
Vzdělávací oblast	Informatika a informační a komunikační technologie		
Vzdělávací obor	Informatika a výpočetní technika		
Tematický okruh	Algoritmus		
Téma	Algoritmus XV. – Algoritmus řešení soustav lineárních rovnic I. - Gaussova eliminace 2		
Klíčová slova	Algoritmus, Gaussova eliminace , matice, Frobeniova věta		

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Pavel Bezděk. Dostupné z Metodického portálu www.rvp.cz ; ISSN 1802-4785. Provozuje Národní ústav pro vzdělávání, školské poradenské zařízení a zařízení pro další vzdělávání pedagogických pracovníků (NÚV).

Řešení soustav lineárních rovnic

Gaussova eliminace 2
Frobeniova věta

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$a_{11}*x_1 + a_{12}*x_2 + a_{13}*x_3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{1n*}x_n = b_1$$

$$a_{21}*x_1 + a_{22}*x_2 + a_{23}*x_3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{2n*}x_n = b_2$$

$$a_{31}*x_1 + a_{32}*x_2 + a_{33}*x_3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{3n*}x_n = b_3$$

.

.

.

$$a_{m1}*x_1 + a_{m2}*x_2 + a_{m3}*x_3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{mn*}x_n = b_n$$

K zápisu soustavy lineárních rovnic používáme matice

Zápis levých stran rovnic soustavy: **Matice soustavy**

matice typu (m,n)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots\dots\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots\dots\dots\dots & a_{3n} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\dots\dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Zápis pravých stran rovnic soustavy:

Sloupcový vektor pravých stran soustavy

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy typu (m,n+1)

Nehomogenní soustava (sloupcový vektor pravých stran není nulový)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{3n} & b_3 \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

Rozšířená matice homogenní soustavy typu (m,n+1)

Homogenní soustava rovnic - pravé strany jsou rovny nule.

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots\cdots & a_{3n} & 0 \\
. & & & & & \\
. & & & & & \\
. & & & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} & 0
\end{bmatrix}
$$

Hodnost matice

Čtvercová matice: **matice typu (n,n)**

Hlavní diagonála matice: **prvky** $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \ldots\ldots\ldots a_{nn}$

Řádkový vektor matice: $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots\ldots\ldots a_{1n})$

$(a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \ldots\ldots\ldots a_{4n})$ **apod.**

Hodnost matice: **Matice má hodnost h, když mezi jejími řádkovými vektory lze nalézt h lineárně nezávislých vektorů (vektorů, které nejsou tvořeny lineární kombinací ostatních vektorů [součtem nenulových násobků ostatních vektorů]).**

Úpravy neměnící hodnost matice:

1. **Libovolné přemístění řádkových vektorů matice**
2. **Vynásobení libovolného řádkového vektoru nenulovým číslem**
3. **Přičtení k libovolnému řádkovému vektoru jakékoli lineární kombinace ostatních řádkových vektorů**
4. **Připojení nebo vynechání libovolného vektoru, který je lineární kombinací ostatních řádkových vektorů**

Frobeniova věta

Regulární matice: čtvercová matice typu (n,n), jejíž hodnost h=n.

Singulární matice: čtvercová matice, která není regulární.

Frobeniova věta: Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Každá homogenní soustava rovnic má aspoň jedno řešení

1. Je-li hodnost matice soustavy rovna počtu neznámých **h=n**,
   má soustava → **jedno řešení x=(0,0,0,0,…..0)**
   (každé $\mathbf{x_i}$ je rovno nule)
2. Je-li hodnost matice soustavy menší, než počet neznámých **h<n**,
   má soustava → nekonečně mnoho řešení

Matice nehomogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Upravíme na trojúhelníkovou matici

Hodnost trojúhelníkové matice nehomogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matice soustavy i rozšířená matice mají stejnou hodnost

h=4, n=4, h=n

(4 lineárně nezávislé řádkové vektory)

Řešení x=(1,2,3,4)

Matice homogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Upravíme na trojúhelníkovou matici

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -10 & -10 & 10 & 0 \\ 0 & -15 & 9 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & -15 & 15 & 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_4 - x_5 = 0$ $\quad x_4 = x_5$ $\qquad x_4 = t \quad x_5 = t$

$x_3 + x_4 - x_5 = 0$

$x_3 + t - t = 0$ $\qquad x_3 = 0$

$x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0$

$x_2 - 0 - t + t = 0$ $\qquad x_2 = 0$

$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$

$x_1 - 0 + 0 + t - t = 0$ $\qquad x_1 = 0$

Hodnost trojúhelníkové matice homogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matice soustavy má hodnost $h=4$, $n=5$, $h<n$

Homogenní soustava má nekonečně mnoho řešení

Řešení $x=(0,0,0,t,t)$

Řešitelnost nehomogenní soustavy

$R^n = R x R x R x R \ldots\ldots x R$ Množina všech n-rozměrných vektorů s reálnými prvky

1 2 3 4 …… n

Je dána řešitelná nehomogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých.

Vektor r_0 je libovolné řešení této nehomogenní soustavy.

W je množina všech řešení homogenní soustavy (která vznikne z dané nehomogenní soustavy nahrazením sloupcového vektoru pravých stran nulovým vektorem).

Pak množinou všech řešení dané nehomogenní soustavy je

$X = \{ r \in R^n, (\exists w \in W)\ r = r_0 + w \}$

Matice nehomogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Hodnost trojúhelníkové matice nehomogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matice nehomogenní soustavy má hodnost $h=4$, $n4$, $h=n$

(4 lineárně nezávislé řádkové vektory)

Řešení $x=(1, 2, 3, 4)$

Matice homogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hodnost trojúhelníkové matice homogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matice homogenní soustavy má hodnost h=4, n=4, h=n

(4 lineárně nezávislé řádkové vektory)

Řešení x=(0, 0, 0, 0)

Řešení pomocí Frobeniovy věty

V tomto případě je pouze jedno řešení, protože h=n, ale i tak Frobeniova věta platí:

Řešení nehomogenní soustavy $x = (1, 2, 3, 4)$

a odpovídající homogenní soustavy $x = (0, 0, 0, 0)$

Podle Frobeniovy věty platí:

$X = (1, 2, 3, 4) + (0, 0, 0, 0) = (1, 2, 3, 4)$

Samozřejmě praktický význam má Frobeniova věta u soustavy s nekonečně mnoha řešeními.

Matice nehomogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 12 \\ 9 & -14 & 28 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

Matice nehomogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & 11 \\ 0 & 33 & -39 & -3 & 33 \\ 0 & 22 & -26 & -2 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & 11 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & 11 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

Matice nehomogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

Matice nehomogenní soustavy má hodnost h=2, n=4, h<n

Řešení x=(1 -14/11s -7/11t, 1+13/11s +1/11t, s, t)

Matice homogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ 9 & -14 & 28 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 = s \quad x_4 = t$

$11x_2 - 13s - t = 0$ $\qquad$ $x_2 = 13/11s + t/11$

$x_1 - 4x_2 + 6s + t = 0 \quad x_1 - 4(13/11s + t/11) + 6s + t = 0$

$x_1 = -14/11s - 7/11t$

Matice homogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matice homogenní soustavy má hodnost h=2, n=4, h<n

Řešení x=(-14/11s -7/11t, +13/11s +1/11t, s, t)

Řešení pomocí Frobeniovy věty

V tomto případě máme nekonečně mnoho řešení, protože h<n.

Řešení nehomogenní soustavy: **x = (1 -14/11s -7/11t, 1+13/11s +1/11t, s, t)**

a odpovídající homogenní soustavy: **x = (-14/11s -7/11t, +13/11s +1/11t, s, t)**

Odhadnout, bez znalosti řešení můžeme třeba řešení $\mathbf{r_0}$ **= (1,1,0,0)**

a existuje řešení homogenní soustavy **w = (-14/11s -7/11t, +13/11s +1/11t, s, t)**

Podle Frobeniovy věty platí:

X = (1,1,0,0)+(-14/11s -7/11t, +13/11s +1/11t, s, t)=

(1 -14/11s -7/11t, 1+13/11s +1/11t, s, t)

Nebo vezmeme třeba $\mathbf{r_0}$ **= (1,0,-1,2)** a

existuje **w = (-14/11s -7/11t, 1+13/11s+1/11t, 1+s, t-2)**

(je řešením homogenní soustavy)

X = (1,0,-1,2) + (-14/11s -7/11t, 1+13/11s+1/11t, 1+s, t-2)=

= (1 -14/11s -7/11t, 1+13/11s +1/11t, s, t)

Použité zdroje

BLAŽEK, Jaroslav. *Algebra a teoretická aritmetika I*., 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983. 278 s.